Ricevimento: Giovedì ore 13:30 - 15:30 (F3) 03/03/15

Libro: Bertsch - Dal Passo - Giannantoni "Analisi Matematica"

$\mathbb{R}^n$ → Spazio "fisico" cioè spazio metrico dove si possono fare delle misure con origine e un sistema di coordinate

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Es.

$\mathbb{R}^2$ $\quad x = (x, y)$

$\mathbb{R}^3$ $\quad x = (x, y, z)$

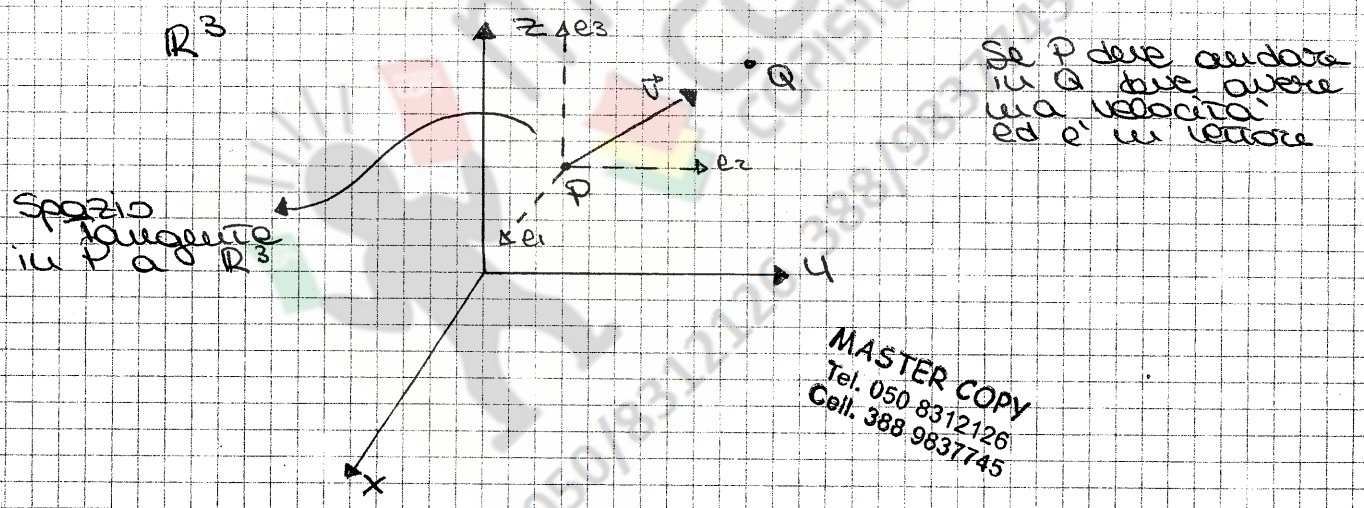
DEFINIZIONE DISTANZA

Una distanza è una funzione $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

(i) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z$ (disuguaglianza triangolare)



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$\mathbb{R}^n$ → Spazio vettoriale

$v \in \mathbb{R}^n$

- Addizione $\quad v + w \in \mathbb{R}^n$
- Moltiplicazione per scalare $\quad \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^n \to \lambda \cdot v \in \mathbb{R}^n$

PRODOTTO SCALARE EUCLIDEO

$v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $\quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$

NORMA EUCLIDEA

$v \in \mathbb{R}^n$ $\quad v = (v_1, \dots, v_n)$

$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ (prod. scalare di se stesso)

PROPRIETA' NORMA :

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che (i) $\|v\| \geq 0$ e

$\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

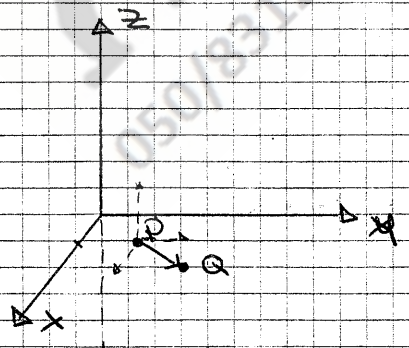
$\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

DISTANZA EUCLIDEA (nello spazio fisico)

$d(x, y) = \| x - y \|$ (vettore applicato a x)

Esempio $\quad P = (1, 2, 0)$ $\quad Q = (0, 3, -1)$ $\quad P - Q = (1, -1, 1)$



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$

$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$

04/03/15

È una funzione definita: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e ha valori $\mathbb{R}$ tale che (i) $\langle v, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}$ e $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$

(ii) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

(iii) $\langle v+w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$

$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE $n = 1$

$\langle v, w \rangle = vw \qquad \|v\| = \sqrt{v^2} = |v|$

$d(x, y) = \|x - y\|$

MATRICE SIMMETRICA (Definizione)

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ si dice simmetrica se $A^T = A$ (matrice trasposta)

DEFINITA POSITIVA (Matrice)

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ si dice definita positiva se $v^T \cdot A \cdot v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \ v \neq 0 \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ (vettore colonna)

TEOREMA

Se $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ simmetrica allora A è diag. le su $\mathbb{R}$

ES. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ → Esistono n autovalori reali con $m_a = m_g$

COROLLARIO

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ simmetrica è definita positiva se e solo se i suoi autovalori sono positivi.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TEOREMA

Se $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ simmetrica e definita positiva allora $\langle v, w \rangle_A := v^T \cdot A \cdot w$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$

DIMOSTRAZIONE

(i) $\langle v, w \rangle_A = v^T A v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad v \neq 0$
porché A è definita positiva

(ii) $\langle v, w \rangle_A = \langle w, v \rangle_A$

$\langle v, w \rangle_A = (\langle v, w \rangle_A)^T = (v^T A w)^T = A^T w^T (v^T)^T$

$= w^T A v$

ESEMPI

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\langle v, w \rangle_{TA} = \langle v, w \rangle$ Euclideo

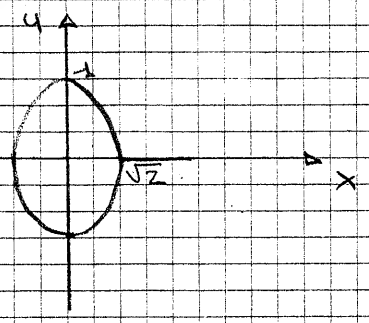
② $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\langle v, w \rangle_A = (v_1 \; v_2) A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 2 v_1 w_1 + v_2 w_2$

$\| v \|_A = \sqrt{\langle v, v \rangle_A} = \sqrt{2 v_1^2 + v_2^2}$

$d(0, P) = 1 \qquad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\| P - O \|_A = \sqrt{2x^2 + y^2} = 1$



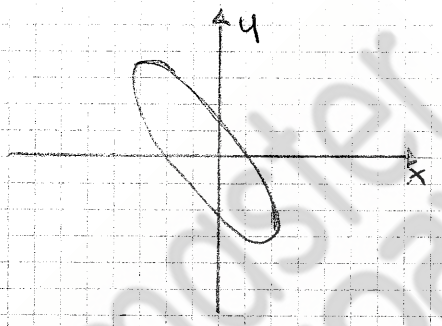
③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ → simmetrica e def. positiva

$$\langle v, w \rangle_A = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} w_1 + 2w_2 \\ 2w_1 + 5w_2 \end{pmatrix} =$$

$$= v_1 w_1 + 2v_1 w_2 + 2v_2 w_1 + 5v_1 w_2$$

$$\|v\|_A = \sqrt{v_1^2 + 4v_1 v_2 + 5v_2^2}$$

$d(O, P) = 1 \quad \Delta = \Delta \quad x^2 + 4xy + 5y^2 = 1 \qquad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



TEOREMA (Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz)

Dati $v, w \in \mathbb{R}^n \quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

$|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \iff v = \lambda w \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Definizione

v è ortogonale a w se $\langle v, w \rangle = 0$ e

$v^{\perp} = \{ w \in \mathbb{R}^n, \langle v, w \rangle = 0 \}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di $\dim = n - 1$